光学設計ノーツ 87 ver.1.0

最小二乗法について 4

今回はこれまでに取り上げさせていただいた最小二乗法を、光学的な計算に用いてみることにする。手始めに最も単純な焦点距離の計算にである。現状の単レンズを最小二乗法により所望の焦点距離を持つ様にする。勿論、特に単レンズであれば簡単に所望の焦点距離の曲率等はきん軸計算により得られてしまうが、ここでは敢えて最小二乗法により曲率を変化させる。基本的な考え方の理解のためには有益と思われる。

1. 設定

図 1 にある様な単レンズの焦点距離を変化させよう。現状では、1 面、2 面の曲率半径、中心肉厚、屈折率は以下の通りである。

r_1 : 61.12522 mm
r_2 : -325.07051 mm
d : 4 mm
n : 1.516328

焦点距離 f : 100 mm
バックフォーカス（レンズ最終面から焦点までの距離） : 97.771

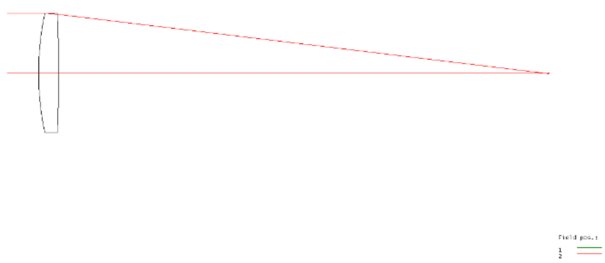

図 1 焦点距離を変化させるレンズ

最初に、２つの曲率半径のみ変化させることとする。最適化する目標は、焦点距離（f）とバックフォーカス（Bf）である。変数が２個、評価値が２個で

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad (86\text{-}3)$$

と置けて、正規方程式、

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} \qquad (53\text{-}14)$$

を用いて２つの x の解がなんとか得られる。
　ところで、（１）式は、

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

を表しているのであるが、ここで、一つの曲率（r_1）が少し変化した場合の、例えば焦点距離(f)の変化の感度を（曲率の微小変化量に対し、焦点距離がどのくらい変化したかの比）、

$$\frac{\partial f}{\partial r_1}$$

と表すとすれば、（２）式に光学的な量を盛り込んで、

$$\begin{aligned} &f(\text{現状}) + \frac{\partial f}{\partial r_1}\Delta r_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}\Delta r_2 = f\,(\text{目的値}) \\ &Bf(\text{現状}) + \frac{\partial (Bf)}{\partial r_1}\Delta r_1 + \frac{\partial (Bf)}{\partial r_2}\Delta r_2 = Bf\,(\text{目的値}) \end{aligned} \qquad (3)$$

とできる。つまり、目的の変化量を b として、

$$\begin{aligned} &f\,(\text{目的値}) - f(\text{現状}) = b_1 \\ &Bf\,(\text{目的値}) - \mathrm{B}f(\text{現状}) = b_2 \end{aligned} \qquad (4)$$

である。

（１）式は以下の形となる。

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \qquad (86\text{-}3)$$

⇩

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r_1} & \dfrac{\partial f}{\partial r_2} \\ \dfrac{\partial (Bf)}{\partial r_1} & \dfrac{\partial (Bf)}{\partial r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

2．実際の計算

上記（３）式は、簡単な連立方程式なので筆算でも、その範囲では、簡単に解は得られるが、今後の多変数、多元化への応用のために正規方程式を用いて解くことを考える。

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} \qquad (53\text{-}14)$$

最初に、（５）式の形で諸量を別に計算しておかなければならない。変化率の計算は実際に曲率を変えてその焦点距離の変化分を調べることによる。以下の様に PC（申し訳無いが、光学設計ソフト）で計算した。上記、焦点距離、バックフォーカス初期値もその折に計算する

	r_1	r_2
r 変化分	-0.1	-0.9
f 変化分	-0.1379	0.043
Bf 変化分	-0.13823	0.042

表 1

すると上記 A は

1.379	-0.0477778
1.3823	-0.0466667

その転置行列 $\mathbf{A}^T$ は

1.379	1.3823
-0.0477778	-0.0466667

よって、それらの積、A^TA は、

3.81239429	-0.1303929
-0.1303929	0.00446049

となる。ここで、目標とする変化量を f、Bf とも＋5mm とすると（f＝105mm、Bf=102.771mm を目指すことになる）、**b** は

5
5

A^Tb は、

（G1）

13.8065
-0.4722222

となる。さらに、（53-14）式は

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} \qquad (6)$$

とできるので、逆行列計算をして（A^TA）$^{-1}$ を求めれば、

（G2）

1561.94825	45660.1787
45660.1787	1335000.75

そして、（G1）と（G2）の積をとり、$\triangle r_1$、$\triangle r_2$ が得られる。

	△*r*		旧 *r*	新 *r*
r_1	3.28752712	+	61.12533	＝64.4128571
r_2	-9.7639556	-	325.07051	＝-334.83447

さて、この結果を近軸計算してみると

	元	最適化後	差
f	100	104.983	4.983
Bf	97.771	102.763	4.993

（mm）

と、比較的良好な結果を示している。因みに同じ計算手法で目標を＋50mm と設定した場合、つまり b が

50
50

となる所だけ、上記計算と異なる場合の結果を下記に示す。

	元	最適化後	差
f	100	149.33	49.3302
Bf	7.771	147.166	49.39452

やや、差が所望の 50mm からずれてきているが、主にこれは焦点距離等の変化率（感度）が一定で無いことによる。特に、より非線形性の強い収差などをターゲットにする場合には工夫が必要となる。

3. 参考文献

1) 安達忠次：線形代数と解析幾何（森北出版、東京、1976）
2) 金谷健一：これなら分かる最適化数学（共立出版、東京、2008）
3) 今野浩、山下浩：非線形計画法（日科技連、東京、1978）
4) 松山実：基礎数値解析（昭晃堂、東京、1998）

執筆者：牛山 善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階