光学設計ノーツ 88 ver. 1.0

最小二乗法について 5

前回では最小二乗法を、焦点距離を計算するという最も簡単な光学的な計算に用いた。そこでは焦点距離もバックフォーカスも同じように 5 mm 伸びるという都合の良い目標を立ててしまった。最小二乗法の基本的な動きを見ていただくためにそうした訳であるが、今回はより、実際的な方向に（それでも非常に単純でありますが）持っていきたいと思う。

1. 設定

今回も前回と同じ図 1 にある単レンズの焦点距離を変化させる。今回はバックフォーカスのみマイナスの方向に動くことを試してみよう。前回と同じように初期値は、1 面、2 面の曲率半径、中心肉厚、屈折率は以下の通りである。

表 1

r_1 : 61.12522 mm
r_2 : -325.07051 mm
d : 4 mm
n : 1.516328

焦点距離 f : 100 mm
バックフォーカス（レンズ最終面から焦点までの距離）: 97.771

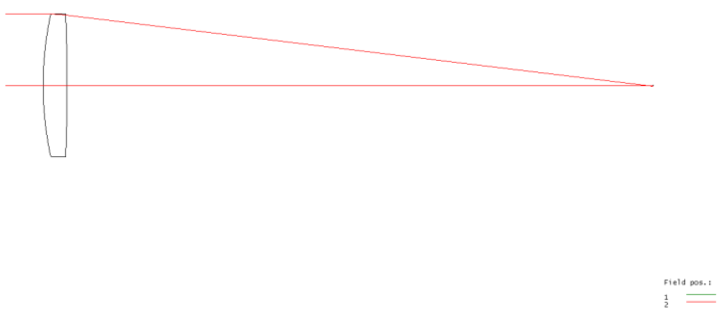

図 1 焦点距離を変化させるレンズ

やはり前回と同様に、2つの曲率半径のみ変化させることとし、やはり最適化する目標は、焦点距離（f）とバックフォーカス（Bf）である。変数が2個、評価値が2個で以下の過程における行列の方程式は前回の（1）式から（6）式までと同様であるのでここでは省略させていただく。前回と異なるのはバックフォーカス（以下 Bf）の目標を 95mm とするところである。前回は Bf を焦点距離と同じくらい伸ばしたので自然の成り行き的な動きであったが、今回は焦点距離は維持して Bf は短い方向に動かすことになる。一応より難しい試行とは考えられる。

図2に示したのは f が同じであるが Bf の異なる二つのレンズである（肉厚は等しい）。2 面の曲率を動かし工夫すればこうしたことが可能であることは近軸の結像式からも容易に理解できる。片方の曲率がきつくなれば、片方の曲率を緩くする（あるいは逆の方向にむける）調節を適当に行えば f は一定となる。当然この時、主点の位置は変化するので Bf は変わることになる。図1からは収差も変化していることが見てとれるが、この様な作業をベンディングと呼び、コンピュータによる最適化普及以前では非常に重要な設計の道具であった。

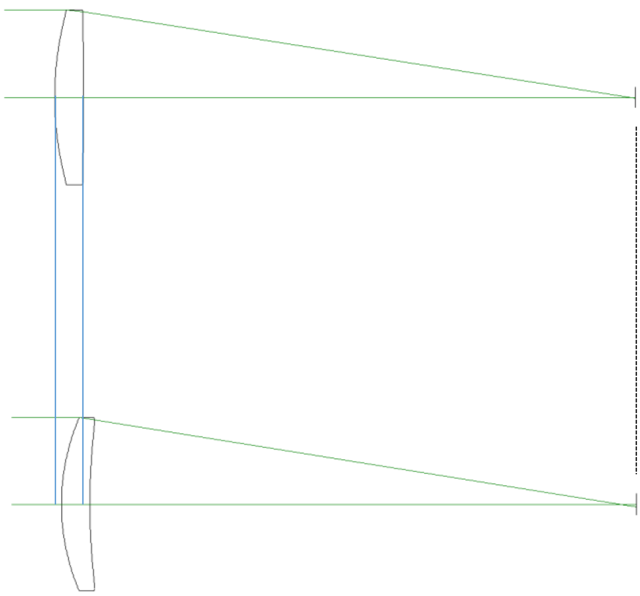

図 2 同じ焦点距離のレンズ（ベンディング）

結局、このベンディングを最小二乗法でやってみようというのが今回の内容である。勿論、近軸理論により本来は解析的に解くべきであることをここでお断りさせていただく。
　一応、事前に答えを計算した。

表 2

r_1 : 27.243 mm
r_2 : 54.789 mm
d : 4 mm
n : 1.516328

焦点距離 f : 100 mm
バックフォーカス（レンズ最終面から焦点までの距離）：95.000

図 2 からもご理解いただける様に全長が短くなる方向にあるので、所謂テレフォトタイプに近くなり正のパワーが前方に移動し 2 面で f を調整する格好になる。ここで、気がつくのが 2 面の符号が−から＋に変化していることである。凸面から凹面になっている。半径何 mm の様に曲率半径で考えている場合には、それは直感的には分かりやすいが、例えば−から＋に変化していくときには r＝0 点を過ぎなければならないので、とんでもなくきつい曲面形状を経ることになる。これは明らかに大胆なレンズ形状変化を阻害しているので、ここからは以下の如くに曲率半径ではなく、設計初期値にはその逆数である曲率を用いて考えなければならない。

r_1 : 61.12522 → c1 : 0.016359859
r_2 : -325.07051 → c2 : −0.00307625567

ただ、PC に半径を入力し、自動的に曲率に変換させれば良いわけである。以下、前回と同様に最小二乗法で計算してみると

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} \qquad (87\text{回}-6)$$

を計算すれば良く、

A:
[[-5420.32031627 4805.6110011]
[-5443.1270669 4698.52794848]]

At:
[[-5420.32031627 -5443.1270669]
[4805.6110011 4698.52794848]]

A^tb:
[[15082.90510238]
[-13019.62094523]]

A^tA:
[[59007504.59738084 -51622635.59226647]
[-51622635.59226647 45170061.97647022]]

$[A^tA]^{-1}$:
[[9.48683320e-05 1.08420337e-04]
[1.08420337e-04 1.23930393e-04]]

となり、曲率半径は

r_1:　28.0440243138282　　　r_2：　53.502676861756974

この時の達成すべき諸元は

f: 108.34777533175019　（＋8.3477）

Bf: 103.08551655692933　（＋8.0855）

となり、思わぬ方向に動いてあまり芳しい結果となっていない様に見える。しかし、レンズの形状としては、2 面が凹面になっていて、表 2 の示したものに近づいていることは確かである。それではこの最小二乗法計算を改めて上記結果を出発点としてさらにもう一回、繰り返したら如何であろうか。その結果を以下に示す。かなり改善されている。

f: 100.0753263030093　（＋0.07532）

Bf: 95.18112436862594　（＋0.18112）

その時の半径は以下の通りである。

r_1:　27.850799561693236　　　r_2：　57.4587371974897

3．参考文献

1)　安達忠次：線形代数と解析幾何（森北出版、東京、1976）
2)　金谷健一：これなら分かる最適化数学（共立出版、東京、2008）
3)　今野浩、山下浩：非線形計画法（日科技連、東京、1978）
4)　松山実：基礎数値解析（昭晃堂、東京、1998）

執筆者：牛山　善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階