

LED 照明ノーツ 15 ver1.1

レンズを使う 2

<sin θ の近似精度>

前回から、照明系を形成するときには最も重要な要素と成るレンズ、或いはミラーの光学的性質、使い方についてできるだけ簡潔に説明させていただき趣旨の“分かり易い照明光学シリーズ”をスタートさせて戴いた。今回はレンズの齎す理想像点を考えるための近軸理論の背景となる $\sin \theta$ の近似の精度について考へたい。

1. 近軸理論の精度は？

前回お話しさせていただいたガラス、空気などが接する境界面における光線の屈折の方向はスネルの屈折則、

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1)$$

により計算できる。ここでの正弦関数 $\sin \theta$ は、無限の項数を持つ多項式を用いて

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (2)$$

と表現できた。

因みにこれは \sin のテイラー展開 (Taylor expansion) であり、一般的な表現は

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{(2n+1)} \quad (3)$$

である。

さて、ここで角度 θ が微小である仮定してしまえば上式は

$$\sin \theta \approx \theta \quad (4)$$

と簡単になる。スネルの屈折則も

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \quad (5)$$

と非常に簡単な式になる。これらの簡単な式で光線の進み方を考えてしまおう、と言うのが近軸理論であった。そのとき、前回の図 6 (上図) における、収差という煩雑なものは消え去り、同じく前回図 6 (下図) における様な簡潔な体系内で光学系を考えることができる。

さて、それでは実際に(3)式における $\sin \theta$ の近似は、 θ の値によりどの様に誤差を生むか考えてみよう。計算結果が下の表である。この中で θ は角度であり表左の列は度数である。しかし(3)式において角度はラジアンという単位で計算しなければならない。その値を 3 行目に記す。(3)式において用いられる値である。(3)式に則り、3 次とあるのは、

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!} \quad (6)$$

5 次とあるのは

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \quad (7)$$

7 次とあるのは、

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \quad (8)$$

としてそれぞれ $\sin \theta$ を近似計算した値である。表 1 には直接その計算値を ($\sin \theta$ の値と比較して戴きたい。)、表 2 にはその時の $\sin \theta$ との差を $\sin \theta$ の値で割った百分率で表している。

θ	$\sin \theta$	θ (rad)	3 次	5 次	7 次
1	0.017452	0.017453	0.017452	0.017452	0.017452
5	0.087156	0.087266	0.087156	0.087156	0.087156
10	0.173648	0.174533	0.173647	0.173648	0.173648
15	0.258819	0.261799	0.258809	0.258819	0.258819
20	0.342020	0.349066	0.341977	0.342020	0.342020
25	0.422618	0.436332	0.422487	0.422619	0.422618
30	0.500000	0.523599	0.499674	0.500002	0.500000
35	0.573576	0.610865	0.572874	0.573583	0.573576
40	0.642787	0.698132	0.641421	0.642803	0.642787
45	0.707107	0.785398	0.704653	0.707143	0.707106
50	0.766044	0.872664	0.761902	0.766120	0.766044
55	0.819152	0.959931	0.812507	0.819299	0.819150
60	0.866025	1.047197	0.855801	0.866295	0.866021
65	0.906308	1.134464	0.891120	0.906779	0.906299
70	0.939693	1.221730	0.917799	0.940482	0.939676
75	0.965926	1.308997	0.935175	0.967202	0.965895
80	0.984808	1.396263	0.942582	0.986806	0.984753
85	0.996195	1.483530	0.939356	0.999239	0.996101
90	1.000000	1.570796	0.924832	1.004525	0.999843

表 1 \sin の近似計算

θ	$\sin \theta$	θ (rad) %	3 次 %	5 次 %	7 次 %
1	0.017452	0.005	0.000	0.0000	0.0000
5	0.087156	0.127	0.000	0.0000	0.0000
10	0.173648	0.510	-0.001	0.0000	0.0000
15	0.258819	1.152	-0.004	0.0000	0.0000
20	0.342020	2.060	-0.013	0.0000	0.0000
25	0.422618	3.245	-0.031	0.0001	0.0000
30	0.500000	4.720	-0.065	0.0004	0.0000
35	0.573576	6.501	-0.122	0.0011	0.0000
40	0.642787	8.610	-0.213	0.0025	0.0000
45	0.707107	11.072	-0.347	0.0051	0.0000
50	0.766044	13.918	-0.541	0.0099	-0.0001
55	0.819152	17.186	-0.811	0.0180	-0.0002
60	0.866025	20.920	-1.181	0.0312	-0.0005
65	0.906308	25.174	-1.676	0.0520	-0.0009
70	0.939693	30.014	-2.330	0.0840	-0.0018
75	0.965926	35.517	-3.184	0.1321	-0.0032
80	0.984808	41.780	-4.288	0.2029	-0.0055
85	0.996195	48.920	-5.706	0.3056	-0.0094
90	1.000000	57.080	-7.517	0.4525	-0.0157

表 2 \sin の近似計算 (%)

15 度くらいまでであれば、なんと $\sin \theta$ を θ と乱暴に置き換えてしまっても誤差は 1% 程度なのである。勿論これは一回の屈折についてだけの誤差であり、一本の光線は光学系内で何回も境界面と出会い屈折する可能性もある。また、光線と面が交わる座標もその都度ずれていくことになり（光線の角度と高さの誤差(図 1)、曲面形状の三角関数近似による誤差(図 2) 等も乗ぜられ誤差分布の範囲は急激に増えていくことになり、簡単には誤差は十分小さいのか？等の議論はできないが、単純に一回の屈折ではこれだけしか、角度の誤差は出ない。それに続く 3 次近似ではさらに誤差は小さくなる。60 度付近まで 1% に達しないのである。5 次、7 次収差になると、計算は大変になるが、さらに微小な誤差となる。この 3 次近似は精度、計算負荷、計算結果の見通しのバランスが良く、3 次収差論という光学設計においては、1 次近似の近軸理論と同様に、非常に重要な収差理論を形成する。以下には表 2 の結果の絶対値をとったグラフ (図 3) を示す。縦軸が誤差の % であり、横軸が 0 度から 90 度までの角度である。

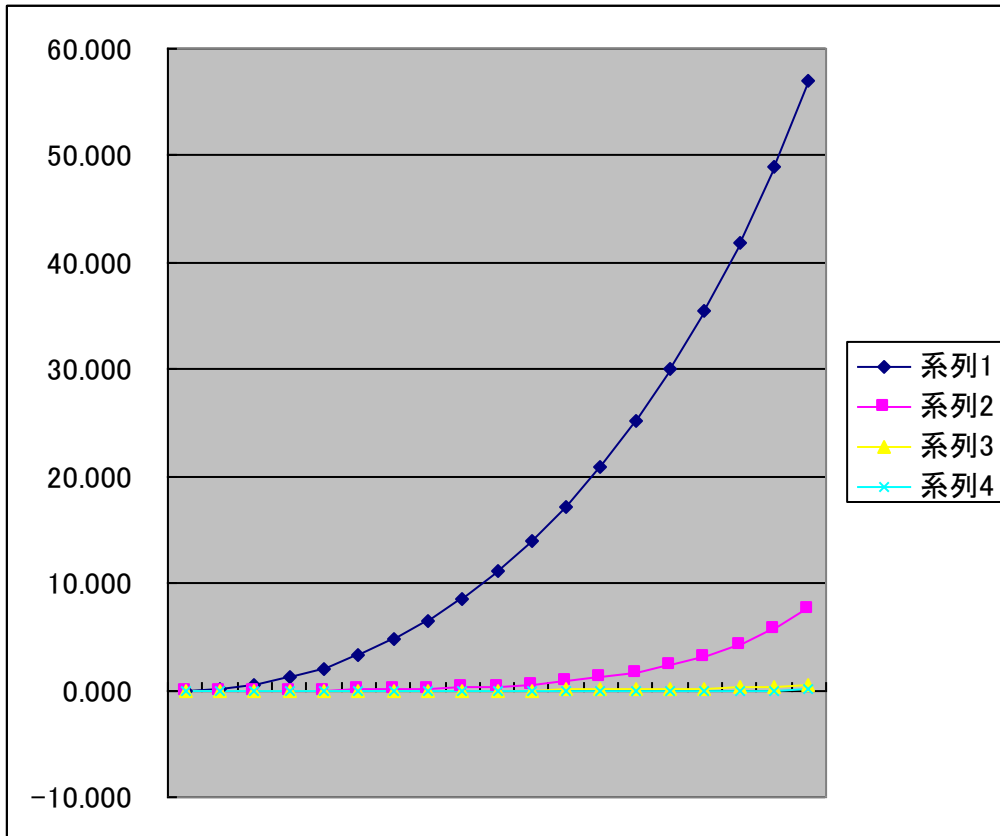


図3 sin の近似計算 (%) 誤差絶対値

系列 1,2,3,4 がそれぞれ、1 次、3 次、5 次、7 次近似の誤差絶対値を表す。さらに絶対値を用いない場合は図 4 に示す。

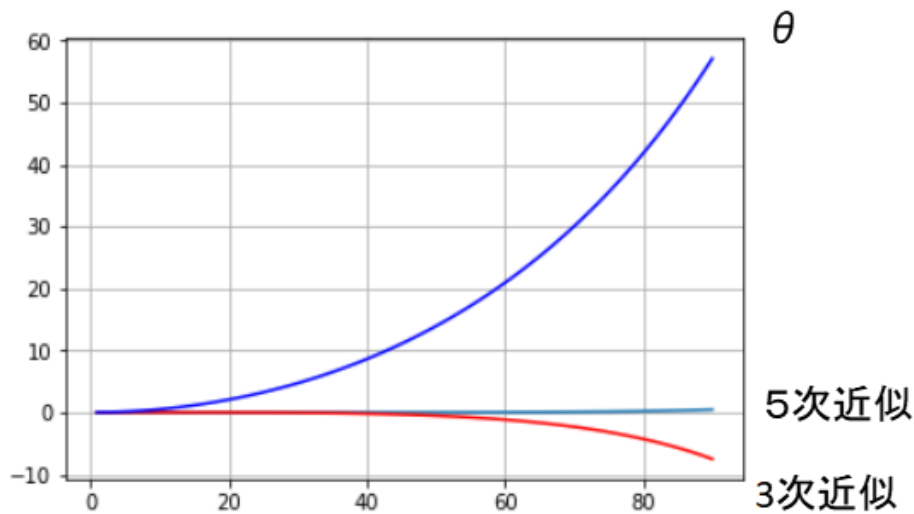


図4 sin の近似計算 (%) 誤差

上図と同様に縦軸が誤差%、横軸が角度である。

これらの計算では夫々の $\sin \theta$ の近似計算の値から $\sin \theta$ の値を引き、 $\sin \theta$ で割って、百分率を求めている。 $\sin \theta$ 、 θ 、そして (6) (7) 式の近似計算結果そのものは図 5, 6 に示す。二つの図では、計算角度の範囲が異なるだけである。

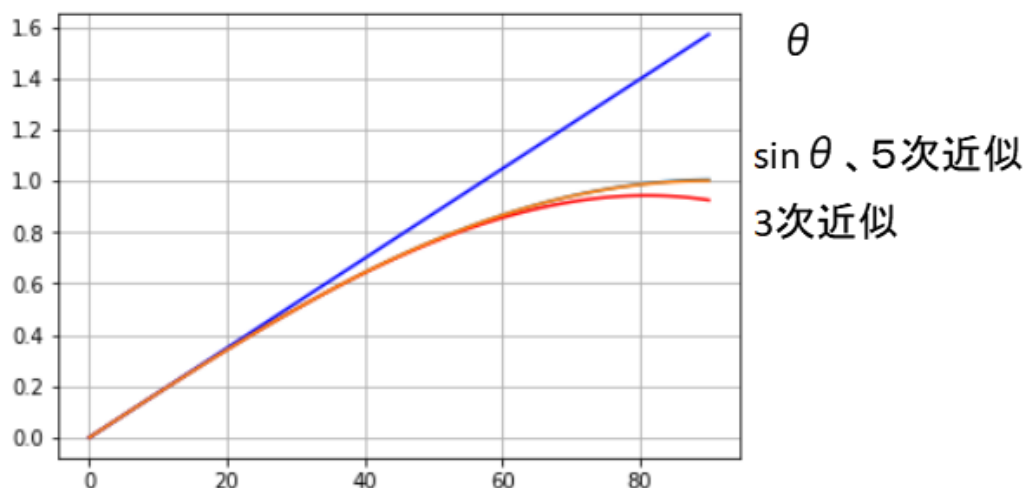


図 5 \sin 近似式の計算結果 0 から 90 度

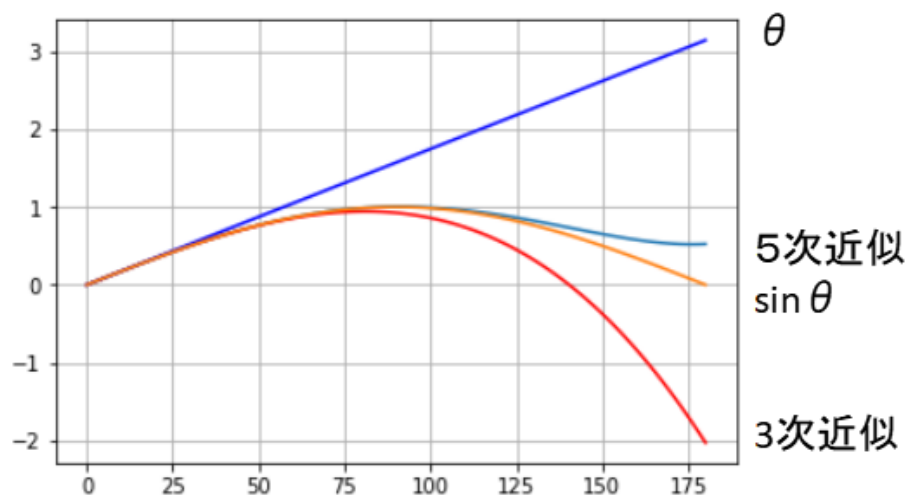


図 6 \sin 近似式の計算結果 0 から 180 度

光線追跡的にはあまり意味のない領域ではあるが、 θ がさらにどんどん増えて行けば、(6) 式第 2 項の 3 乗の項の絶対値はそれこそ指数級数的に増大し、図 6 の 3 次近似の値は大きく負の値へと逸れていく。5 次近似においてもこの理由により正の 5 次の項の影響が大きくなり、正方向に発散する。当然、 \sin は -1 から 1 の間の周期関数なので、乖離は甚だしくなっていく。

2. 参考図書

- 1) 小倉敏布：写真レンズの基礎と発展（朝日ソノラマ、東京、1995）
- 2) 高野栄一：レンズデザインガイド（写真工業出版社、東京、1993）
- 3) 松居吉哉：結像光学入門（JOEM、東京、1988）

執筆者：牛山 善太

博士（工学）

元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師

（株）タイコ 代表取締役

（株）オプティカルソリューションズ 顧問

提供：

株式会社オプティカルソリューションズ

TEL: **03-5833-1332**

Mail: info@osc-japan.com

Web: <http://www.osc-japan.com>

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階