光学設計ノーツ 80

# 多数の波動による干渉、波動の合成の考え方

前回に引き続いて干渉について考えさせていただきたい。特に多数の光波が重なり合い、干渉する場合の定式化について整理・説明させていただく。

## 1. 多くの光波による干渉の式

ここで、多くの光波による干渉について再び考えてみると、本連載 79 回では多数（$m$ 個）の光波の合成の場合には干渉による強度 $I$ は以下の様に表現することが可能であった。（ε については本連載前回 79 回の(16)式をご参照願いたい。）

$$C=\sum_m A_m\cos\varepsilon_m \qquad (1)$$

$$S=\sum_m A_m\sin\varepsilon_m \qquad (2)$$

とした場合、

$$I=C^2+S^2 \qquad (3)$$

と強度 $I$ が表わされる。２成分に分けて考えれば

$$C^2=\sum_j^m A_j^2\cos^2\varepsilon_j+\sum_{j,k}^m{}' A_jA_k\cos\varepsilon_j\cos\varepsilon_k \qquad (4)$$

(79-15)

$$S^2=\sum_j^m A_j^2\sin^2\varepsilon_j+\sum_{j,k}^m{}' A_jA_k\sin\varepsilon_j\sin\varepsilon_k \qquad (5)$$

である。ここにΣ’は $j=k$ の場合を除くことを意味している。

因みに m＝2 の 2 光波の場合を考えてみると、

$$C^2 = (A_1\cos\varepsilon_1 + A_2\cos\varepsilon_2)^2$$

$$= A_1^2\cos^2\varepsilon_1 + A_2^2\cos^2\varepsilon_2 + 2A_1\cos\varepsilon_1 A_2\cos\varepsilon_2 \tag{6}$$

$$S^2 = (A_1\sin\varepsilon_1 + A_2\sin\varepsilon_2)^2$$

$$= A_1^2\sin^2\varepsilon_1 + A_2^2\sin^2\varepsilon_2 + 2A_1\sin\varepsilon_1 A_2\sin\varepsilon_2 \tag{7}$$

となり、それぞれ(4)(5)式の結果と一致する。

また、強度を考えると、

$$C^2 + S^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left(\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2 + \sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2\right)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tag{8}$$

となり、$\omega_1=\omega_2$ とした場合の本連載 79 回(6)式からの

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left\langle\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\right\rangle \tag{79-10}$$

と同じ形になる。

## 2. 干渉の元々の表現

元々、合成された振幅 $u$ は正弦波の合成として以下の様に表現できた。

$$u = \sum_m u_m = \sum_m A_m \quad \sin(\omega t + \varepsilon_0 + \varepsilon_m) \qquad (9)$$

$$= \sum_m A_m \quad \{\sin(\omega t + \varepsilon_0)\cos\varepsilon_m + \cos(\omega t + \varepsilon_0)\sin\varepsilon_m\}$$

$$= \sum_m A_m \cos\varepsilon_m \cdot \sin(\omega t + \varepsilon_0) + \sum_m A_m \sin\varepsilon_m \cdot \cos(\omega t + \varepsilon_0) \qquad (10)$$

ここで（1）（2）式にある様に

$$C = \sum_m A_m \cos\varepsilon_m = A\cos\varepsilon \qquad (1')$$

$$S = \sum_m A_m \sin\varepsilon_m = A\sin\varepsilon \qquad (2')$$

と新たな時間変化に対して一定な、波動を便宜的に考えた場合（ここでの新たな波動式の ch 直感的イメージは掴みにくい。しかし、それぞれの単独波動の振幅と位相のみにより、合成されて決まる、新たな波動が表されていることには違いないので（1'）（2'）の様に表現可能である。また、そこから A、ε が得れることに大きな意味がる。波動の合成を考える場合には重要な考え方である。)、

$$u = A\cos\varepsilon \cdot \sin(\omega t + \varepsilon_0) + A\sin\varepsilon \cdot \cos(\omega t + \varepsilon_0) \qquad (11)$$

或いは

$$u = C \cdot \sin(\omega t + \varepsilon_0) + S \cdot \cos(\omega t + \varepsilon_0) \qquad (12)$$

である。これら基本波動に時間、初期位相による係数が乗じられて、折々の振幅が決まる。その（１１）式より、三角関数の性質から $u$ の最大値は A である。よって時間に対して不変な、ここで考えている干渉による最大振幅は（1'）（2'）式における A によって表されることになる。従って、時間に依存しない構造における最大強度は、

$$C^2 + S^2 = (A\cos\varepsilon)^2 + (A\sin\varepsilon)^2 = A^2 \qquad (12)$$

と、(3)式の通りである。本連載前回 79 回の（１５）式、以下(79-15)式と表そう、もこの考え方の上に成立している。

また、この時の位相 $\varepsilon$ は、以下の関数から求められる。

$$\tan\varepsilon = \frac{\sum_m A_m \sin\varepsilon_m}{\sum_m A_m \cos\varepsilon_m} \qquad (13)$$

さてここで、(79-15)式をさらに整理して行くと、

$$C^2 + S^2 = \sum_j^m A_j^2 \cos^2\varepsilon_j + \sum_{j,k}^{m}{}' A_j A_k \cos\varepsilon_j \cos\varepsilon_k$$
$$+\sum_j^m A_j^2 \sin^2\varepsilon_j + \sum_{j,k}^{m}{}' A_j A_k \sin\varepsilon_j \sin\varepsilon_k \qquad (14)$$

右辺、第１、３項はまとめて

$$\sum_j^m A_j^2 \cos^2\varepsilon_j + \sum_j^m A_j^2 \sin^2\varepsilon_j = \sum_j^m A_j^2 \left(\cos^2\varepsilon_j + \sin^2\varepsilon_j\right) \qquad (15)$$

と、出来るので

$$C^2 + S^2 = \sum_j^m A_j^2 + \sum_{j,k}^{m}{}' A_j A_k \cos\varepsilon_j \cos\varepsilon_k + \sum_{j,k}^{m}{}' A_j A_k \sin\varepsilon_j \sin\varepsilon_k$$

（Σ’は $j=k$ の場合を除くことを意味している。）

$$= \sum_j^m A_j^2 + 2\sum_{k>j}^m \sum_{j=1}^m (A_j A_k \cos\varepsilon_j \cos\varepsilon_k + A_j A_k \sin\varepsilon_j \sin\varepsilon_k)$$

$$= \sum_j^m A_j^2 + 2\sum_{k>j}^m \sum_{j=1}^m A_j A_k (\cos\varepsilon_j \cos\varepsilon_k + \sin\varepsilon_j \sin\varepsilon_k)$$

$$= \sum_j^m A_j^2 + 2\sum_{k>j}^m \sum_{j=1}^m A_j A_k \cos(\varepsilon_j - \varepsilon_k) \qquad (15)$$

と表せる。

## 3. 参考文献

1）久保田広：”応用光学”、(1989、岩波書店、東京）,p75
2）牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス、東京、2005）
3）E.Hecht:Optics 5th.edi.(Pearson,Harlow,2017),p291-293

執筆者：牛山　善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ　代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ　顧問

提供：
**株式会社オプティカルソリューションズ**
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階